CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ

„OPT *SPRE* ZECE”

13 aprilie 2024

EDIȚIA a VII a

Barem de corectare și notare

Clasa a VIII a

SUBIECTUL I: Oficiu..1 p

a) Prin înmulțire cu 2 obținem $x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + x^2 + y^2 - 2xy = 2$, adică $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-y)^2 = 2$...1 p

Din x, y ϵ $\mathbb{Z}$ obținem: Cazul 1: x - 1=0, $(y-1)^2 = 1$ și $(x-y)^2 = 1$

Cazul 2: y - 1=0, $(x-1)^2 = 1$ și $(x-y)^2 = 1$ și Cazul 3: x - y=0, $(x-1)^2 = 1$ și $(y-1)^2 = 1$ ....1 p

(x , y) ϵ $\{(1,0); (1,2); (0,1); (2,1); (0,0); (2,2)\}$ ....1 p

b) $a^2 + b^2 = 4ab \Leftrightarrow (a-b)^2 = 2ab \Leftrightarrow |a-b| = \sqrt{2ab}$ ....1 p

$a^2 + b^2 = 4ab \Leftrightarrow (a+b)^2 = 6ab \Leftrightarrow |a+b| = \sqrt{6ab}$ 1p

$|a^2 - b^2| = 2\sqrt{3}ab$ și deci, $\frac{a^2+b^2}{|a^2-b^2|} = \frac{4ab}{2\sqrt{3}ab} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ....1 p

SUBIECTUL II: Oficiu...1 p

Observă că termenii de sub radical sunt de forma n(n+2)+8 ....1 p

n(n+2)+8= $(n+1)^2 + 7 > (n+1)^2$ ....1 p

n(n+2)+8 $< (n+2)^2$ pentru orice n≥ 3 ....1 p

$\left[\sqrt{n(n+1)+8}\right] = n+1$ pentru orice n≥ 3 ....1 p

Pentru n=1 și n=2 avem $\left[\sqrt{1 \cdot 3 + 8}\right] = 3$ și $\left[\sqrt{2 \cdot 4 + 8}\right] = 4$ .... 1 p

S = 3+4+(3+4+……101) = 7+105· $98 \div 2 = 5152$ ....1 p

SUBIECTUL III:

Oficiu..1p

a)Planul (A'OM) = (A'AC). Din BO⊥AC și BO⊥AA' obținem BO⊥(A'AC) ⇒ $pr_{(A'OC)}B = O \Rightarrow pr_{(A'OC)}BM = OM$, deci ∢(BM; (A'AC))= ∢BMO ....1 p

În ΔA'BC, ∢A'BC= 90^0, A'B=a$\sqrt{2}$, A'C=a$\sqrt{3}$, iar BM⊥A'C ⇒ BM= $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. BO= $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ 1p

În ΔBOM, ∢BOM= 90^0 ⇒ sin∢BMO= $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⇒ ∢BMO=60^0 ....1 p

b)Construim OH⊥A'C. Din BD⊥(A'AC)⇒ OH⊥BD, deci d(BD; A'C)= OH....................1 p

$\Delta CHO \sim \Delta CAA' \Rightarrow \frac{CO}{A'C} = \frac{OH}{AA'} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{6}}{6}$ ....2 p

SUBIECTUL IV:

Oficiu..1p

a)AD⊥(ABA') ⇒ A'B⊥AD ....1 p

În ΔA'AB, $\sphericalangle A'AB$=90^0, deci A'B= a$\sqrt{3}$, iar în ΔABM, ∢ABM=90^0 ⇒ $AM = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Notăm AM∩ $A'B = \{T\}$. Din BM∥ $AA' \Rightarrow \Delta BTM \sim \Delta A'TA \Rightarrow \frac{MT}{AT} = \frac{BT}{A'T} = \frac{1}{2} \Rightarrow MT = \frac{a\sqrt{6}}{6}$ și BT= $\frac{a\sqrt{3}}{3}$…...1 p

Verificăm că în ΔBTM are loc relația lui Pitagora ⇒ $A'B \perp AM$ și deci A'B⊥ (AMD)……..1 p

b)Fie E mijlocul segmentului CC'. Din BE∥AN și BE∥C'M ⇒MC'∥AN ⇒ MC' ⊂ (AMN) ⇒ (A'AC) ∩ (AMN) = AC'. Din A'O ⊂ (A'AC) ⇒ A'O ∩ (AMN) = A'O ∩ AC' = $\{G\}$ ………1 p

AO∥A'C' ⇒ ΔAOG~ ΔC'A'G ⇒ $\frac{OG}{OA'} = \frac{AG}{C'G} = \frac{OA}{A'C'} = \frac{1}{2}$. În ΔA'BD, A'O – mediană și $\frac{OG}{OA'} = \frac{1}{3}$ ⇒

G este centrul de greutate al ΔA'BD ……………………………………………………………1 p

AN∥C'M și AN=C'M ⇒ ANC'M – paralelogram ⇒ AC' ∩ MN = $\{F\}$ și F este mijlocul segmentelor MN și AC'. AF = $\frac{AC'}{2}$, sau AC' = 2AF. Dar, $\frac{AG}{C'G} = \frac{1}{2}$ ⇒ $\frac{AG}{AC'} = \frac{1}{3}$ sau $\frac{AG}{2AF} = \frac{1}{3}$ ⇒ $\frac{AG}{AF} = \frac{2}{3}$. Cum AF este mediană în ΔAMN ⇒ G este centrul de greutate al ΔAMN ……..….1 p