CONCURS INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ”8 SPRE 10”
EDIȚIA A VI –A, 13 APRILIE 2024

BAREM DE CORECTARE - CLASA a VII – a

Subiectul I (7 puncte)

Se consideră suma $S_n = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}} + \cdots + \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}$, unde n este număr natural nenul.

a) Calculați S_{195}.

b) Determinați numerele naturale nenule n, n < 35 pentru care $S_n \in Q$.

	Oficiu	**1p**
a)	$S_{195} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \cdots + \frac{\sqrt{196}}{\sqrt{195 \cdot 196}} - \frac{\sqrt{195}}{\sqrt{195 \cdot 196}}$	1p
	Determinare $S_{195} = 1 - \frac{1}{\sqrt{196}} \to S_{195} = \frac{13}{14}$ Se punctează corespunzător și varianta de calcul $S_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ și apoi se particularizează pentru n = 195.	2p
b)	$S_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ Se va acorda punctajul maxim dacă elevul calculează această sumă la punctul a).	1p
	$S_n \in Q \leftrightarrow 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \in Q \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ $\sqrt{n+1} \in Q \leftrightarrow n+1$ este pătrat perfect	1p
	Finalizare, $n \in \{3, 8, 15, 24\}$	1p

SUBIECTUL II (7 puncte)

a) Se dau numerele raționale a, b, c, astfel ca $\frac{2024}{a+3} + \frac{2024}{b+4} + \frac{2024}{c+5} = 2023$, $a \neq -3$, $b \neq -4$, $c \neq -5$. Aflați valoarea numărului rațional n, unde $n = \frac{a-1}{a+3} + \frac{b}{b+4} + \frac{c+1}{c+5}$.

b) Dacă x și y sunt numere reale nenule, astfel încât $5x^3 + 2x^2y = 2y^3 + 5xy^2$, arătați că $\frac{3x+4y}{4x+3y} \in Z$

	Oficiu	**1p**
a)	$\frac{1}{a+3} + \frac{1}{b+4} + \frac{1}{c+5} = \frac{2023}{2024}$	1p
	$n = \frac{(a+3)-4}{a+3} + \frac{(b+4)-4}{b+4} + \frac{(c+5)-4}{c+5} = 3 - 4 \cdot \left(\frac{1}{a+3} + \frac{1}{b+4} + \frac{1}{c+5}\right)$	1p

	n= - $\frac{505}{506}$	1p
b)	Egalitatea din enunț se aduce la forma: (x – y)(x +y)(5x + 2y) = 0	1p
	Analizarea situațiilor x = y, x =- y	1p
	Cazul x = - $\frac{2y}{5}$, finalizare	1p

<u>Subiectul III (7 puncte)</u>

Se consideră ΔABC, $\hat{A}$ = 90º, AD înălțimea corespunzătoare ipotenuzei, D ∈ (BC). Știind că $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$ și AD = 36 cm, calculați:

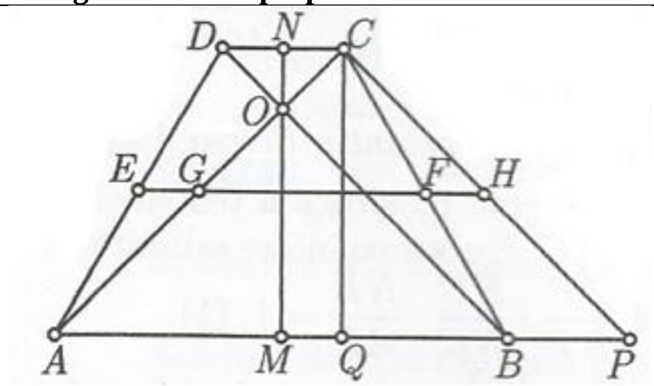
a) Perimetrul și aria ΔABC.

b) Valoarea raportului $\frac{A_{\Delta ABD}}{A_{\Delta ACD}}$.

	Oficiu	**1p**
a)	$\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4} \rightarrow \frac{AB}{3} = \frac{AC}{4} = k \rightarrow AB = 3k,\ AC = 4k, BC = 5k$ Determinarea lungimilor laturilor ΔABC, AB = 45 cm, AC = 60 cm și BC = 75 cm Determinarea ariei și perimetrului ΔABC	1p 2p 1p
b)	Asemănarea ΔABD și ΔCAD.	1p
	Utilizare: *Raportul ariilor a două triunghiuri asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare*. Finalizare	1p
	*Se va acorda punctajul corespunzător și dacă elevul calculează ariile triunghiurilor și apoi determină raportul cerut.	

<u>Subiectul IV (7 puncte)</u>

Arătați că într-un trapez isoscel înălțimea este egală cu linia mijlocie dacă și numai dacă diagonalele sunt perpendiculare.

	Oficiu	**1p**
1.	**Dacă în trapezul isoscel înălțimea este egală cu linia mijlocie, atunci diagonalele sunt perpendiculare.**	
		
	Fie CP ∥ DB, P∈ AB (se poate folosi și construcția DP ∥ AC, P∈ AB), DBPC paralelogram (vom arăta că ΔACP este dreptunghic, $\widehat{ACP}$ = 90º).	1p
	GH linie mijlocie în ΔACP, GH = AP:2 → GH = (AB + DC):2 GH = EF, EF = CQ, CQ înălțime în trapez, Q∈ (AB). Prin urmare CQ = AP:2	1p

	ΔACP isoscel, CQ înălțime → CQ mediană CQ = AP:2, se obține ΔACP dreptunghic, $AC \perp CP$ $AC \perp CP$, $CP \parallel DB$ → $DB \perp AC$	1p
2.	**Dacă în trapezul isoscel dat, diagonalele sunt perpendiculare, atunci înălțimea este egală cu linia mijlocie.**	
	$AC \cap DB = \{O\}$, EF linia mijlocie a trapezului, MN înălțime, $M \in AB$ și $N \in DC$, $O \in MN$.	1p
	Justificare ΔAOB dreptunghic isoscel → OM = AB:2 Analog, ΔCOD dreptunghic isoscel → NO = CD:2	1p
	Finalizare: MN = MO +NO → MN = (AB + CD):2 → MN = EF	1p

Orice altă soluție, diferită de cea prezentată în barem, se va puncta corespunzător.