CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ

„OPT *SPRE* ZECE”

27 mai 2023

EDIȚIA a VI a

BAREM DE NOTARE ȘI CORECTARE

CLASA A V A

SUBIECTUL I

a) Arătați că numărul $A = 2^n \cdot 3^{n+1} + 6^n \cdot 5 + 2^{n+1} \cdot 3^{n+1}$ este divizibil cu 21, pentru orice număr natural nenul n.

Oficiu.. 1 p

$$A = 14 \cdot 6^n$$ 2 p

$$A = 21 \cdot 4 \cdot 6^{n-1} \vdots 21$$ 1 p

b) Câte numere naturale de 4 cifre se pot scrie ca suma a 5 numere naturale consecutive?

Fie $n, n+1, n+2, n+3, n+4$ cele 5 nr consecutive

Avem $n + n + 1 + \ n + 2 + \ n + 3 + \ n + 4 = \overline{abcd} \rightarrow 5n + 10 = \overline{abcd}$ 1 p

$$1000 \leq \overline{abcd} \leq 9999 \rightarrow 198 \leq n \leq 1997\ rest\ 4$$ 1 p

Nr valorilor lui n este $1997 - 198 + 1 = 1800$. Sunt 1800 de numere. 1 p

SUBIECTUL II

Fie $S(n)$ suma cifrelor numărului natural n. Determinați toate numerele naturale n, pentru care $n + S(n) = 2023$.

$n + S(n) = 2023 \rightarrow n < 2023 \rightarrow n\ nu\ poate\ avea\ mai\ mult\ de\ 4\ cifre.$ Deasemenea n nu poate avea 1 sau 2 cifre. 1 p

Dacă n are 3 cifre $n + S(n) \leq 999 + 27 < 2023$ imposibil 1 p

Dacă n are 4 cifre $n = \overline{abcd} \rightarrow 1001a + 101b + 11\,c + 2\,d = 2023$ 1 p

$$pt\ a = 1 \rightarrow \overline{abcd} = 1997$$ 2 p

$$\text{Pt } a = 2 \rightarrow \overline{abcd} = 2015$$ 2 p

SUBIECTUL III

a) Calculați $\frac{a}{a+1} + \frac{b+1}{b+2} + \frac{c+2}{c+3} + \frac{2023}{2022}$ știind că $\frac{2022}{a+1} + \frac{2022}{b+2} + \frac{2022}{c+3} = 2023$.

Oficiu .... 1 p

$$\frac{2022}{a+1} + \frac{2022}{b+2} + \frac{2022}{c+3} = 2023 \rightarrow \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+3} = \frac{2023}{2022}$$ 1 p

$$\frac{a}{a+1} + \frac{b+1}{b+2} + \frac{c+2}{c+3} + \frac{2023}{2022} = \frac{a+1-1}{a+1} + \frac{b+2-1}{b+2} + \frac{c+3-1}{c+3} + \frac{2023}{2022}$$ 1 p

$$\left(1 - \frac{1}{a+1}\right) + \left(1 - \frac{1}{b+2}\right) + \left(1 - \frac{1}{c+3}\right) + \frac{2023}{2022} = 3 - \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+3}\right) + \frac{2023}{2022}$$ 0,5 p

$$= 3$$ 0,5 p

b) Să se arate că $\frac{16}{3\cdot 11}+\frac{16}{11\cdot 19}+\frac{16}{19\cdot 27}+\cdots+\frac{16}{2003\cdot 2011}<\frac{2}{3}$

$$2\cdot\left(\frac{11-3}{3\cdot 11}+\frac{11-9}{11\cdot 19}+\frac{27-19}{19\cdot 27}+\cdots+\frac{2011-2003}{2003\cdot 2011}\right)<\frac{2}{3}$$ 1 p

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{11}+\frac{1}{11}-\frac{1}{19}+\cdots+\frac{1}{2003}-\frac{1}{2001}<\frac{1}{3}$$ 1 p

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{2011}<\frac{1}{3}$$ 1 p

SUBIECTUL IV

Se pot alege 5 numere naturale, astfel încât numerele formate din suma a câte 2 să fie 10 numere naturale consecutive?

Oficiu.. 1 p

Presupunem, prin reducere la absurd, că putem alege 5 numere care să satisfacă ipoteza. Notăm a, b, c, d, e cele 5 numere. 1 p

Sumele căutate sunt: $a+b; a+c; a+d; a+e; b+c; b+d; b+e; c+d; c+e; d+e$. 1 p

Suma lor este: $4a+4b+4c+4d+4e=M_4$ 2 p

Suma a 10 numere consecutive este: $x+(x+1)+(x+2)+\cdots+(x+9)=10x+45$ $=5(2x+9)\neq M_4$ Contradicție! 1 p

Presupunerea făcută este falsă, așadar nu se pot allege 5 numere în condițiile ipotezei 1 p