CONCURSUL JUDEȚEAN DE MATEMATICĂ

„OPT *SPRE* ZECE"

28 MARTIE 2026

EDIȚIA a IX a

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

CLASA a VIII a

SUBIECTUL I **22,5 PUNCTE**

Fie numerele reale diferite a și b care au proprietățile: $a^2+b\in\mathbb{Q}$ și $b^2+a\in\mathbb{Q}$. Arătați că:

a) Numerele $a=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ și $b=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$ verifică proprietățile date

b) Dacă $a+b\in\mathbb{Q}\setminus\{1\}$, atunci a și b sunt numere raționale.

Soluție. a) $a^2+b=\frac{1+2\sqrt{2}+2}{4}+\frac{2-2\sqrt{2}}{4}=\frac{5}{4}\in\mathbb{Q}$ **3p**

$b^2+a=\frac{1-2\sqrt{2}+2}{4}+\frac{2+2\sqrt{2}}{4}=\frac{5}{4}\in\mathbb{Q}$ **3p**

b)Din $a^2+b\in\mathbb{Q}$ și $b^2+a\in\mathbb{Q}\Rightarrow(a^2+b)-(b^2+a)\in\mathbb{Q}$ **2p**

$(a^2+b)-(b^2+a)=a^2-b^2-(a-b)=(a-b)(a+b)-(a-b)=(a-b)(a+b-1)\in\mathbb{Q}$..**5,5p**

Deoarece $a+b-1\neq 0$ și $a+b-1\in\mathbb{Q}\Rightarrow a-b\in\mathbb{Q}$ **3p**

Din $a+b-1\in\mathbb{Q}\Rightarrow a+b\in\mathbb{Q}$ **2p**

Cum $a+b\in\mathbb{Q}$ și $a-b\in\mathbb{Q}\Rightarrow 2a\in\mathbb{Q}$ și $2b\in\mathbb{Q}$ **2p**

Finalizare..**2p**

SUBIECTUL II **22,5 PUNCTE**

Dacă x, y, z sunt numere reale cu $x\geq 2; y\geq 2$ și $z\geq 2$, arătați că:

$$A=\sqrt{\frac{x-2}{x^2-2x+1}}+\sqrt{\frac{y-2}{y^2-2y+1}}+\sqrt{\frac{z-2}{z^2-2z+1}}\leq\frac{3}{2}$$

Soluție. $A=\frac{\sqrt{x-2}}{|x-1|}+\frac{\sqrt{y-2}}{|y-1|}+\frac{\sqrt{z-2}}{|z-1|}$ **3p**

Din $x>1, y>1, z>1\ \Rightarrow A=\frac{\sqrt{x-2}}{x-1}+\frac{\sqrt{y-2}}{y-1}+\frac{\sqrt{z-2}}{z-1}$ **3p**

$\frac{\sqrt{x-2}}{x-1}\leq\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sqrt{x-2}\leq\frac{x-1}{2}$, deoarece $x-1>0\Leftrightarrow x-2\leq\frac{x^2-2x+1}{4}\Leftrightarrow 4x-8\leq x^2-2x+1\Leftrightarrow x^2-6x+9\geq 0\Leftrightarrow(x-3)^2\geq 0$, adevărat $\forall\ x\geq 2$ **10p**

Analog $\frac{\sqrt{y-2}}{y-1}\leq\frac{1}{2}$ și $\frac{\sqrt{z-2}}{z-1}\leq\frac{1}{2}$ pentru orice $y\geq 2$ și $z\geq 2$ **3p**

Prin însumarea celor trei relații obținem relația cerută **3,5p**

SUBIECTUL III **22,5 PUNCTE**

Pe planul pătratului ABCD se ridică perpendiculara $AM\perp(ABC)$, $AM=AB=\sqrt{2}cm$. Fie $E\in(BC)$, astfel încât $EC=1cm$.

a) Calculați distanța de la punctul A la planul (MCD)

b) Calculați distanța de la punctul M la dreapta DE

Soluție. a) $CD\perp AD$ și $CD\perp AM\ \Rightarrow CD\perp(MAD)$ **2p**

În (MAD) construim $AH\perp MD$, din $CD\perp(MAD)\Rightarrow AH\perp CD$ și deci $AH\perp$

$(MCD), deci\ d(A,\ (MCD)) = AH$ **3p**

În ΔMAD din teorema înălțimii obținem $AH = \frac{AD\cdot MA}{MD} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2} = 1$.............**2p**

b) MA $\perp (ABC)$, în (ABC) construim $AP \perp DE$. Conform teoremei celor 3 perpendiculare obținem $MP \perp DE$, deci $d(M, DE) = MP$......................................**3p**

$\mathcal{A}(\Delta ADE) = \mathcal{A}(ABCD) - \mathcal{A}(\Delta ABE) - \mathcal{A}(\Delta DCE) = \sqrt{2}^2 - \frac{\sqrt{2}\cdot 1}{2} - \frac{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}-1)}{2} = 1$..**3p**

În ΔECD cu $\sphericalangle C = 90^0 \Rightarrow ED^2 = \sqrt{2}^2 + 1^2 \Rightarrow ED = \sqrt{3}$...**3p**

$\mathcal{A}(\Delta AED) = \frac{ED\cdot AP}{2} \Rightarrow AP = \frac{1\cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ **3,5p**

În ΔMAC cu $\sphericalangle A = 90^0 \Rightarrow MP^2 = \sqrt{2}^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Rightarrow MP = \frac{\sqrt{30}}{3}$..............................**3p**

SUBIECTUL IV **22,5 PUNCTE**

Într-un stup în formă de paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile de 6 dm, 9 dm, 12 dm au intrat 25 albine care s-au împrăștiat zburând în tot stupul.

a) Să se arate că oricare ar fi poziția unei albine în interiorul stupului, suma distanțelor de la acea albină la vârfurile stupului este mai mare de 64dm

b) Să se arate că în orice moment, există două albine la o distanță mai mică sau egală de $3\sqrt{3}\ dm$ una față de alta.

Soluție. a) Suma distanțelor la două vârfuri opuse ale paralelipipedului are valoarea minimă egală cu lungimea diagonalei paralelipipedului, adică $\sqrt{6^2 + 9^2 + 12^2} = \sqrt{261} = 3\sqrt{29}$.....**3p**

Suma distanțelor la care se află o albină față de vârfurile paralelipipedului are valoarea minimă $4 \cdot 3\sqrt{29} = 12\sqrt{29}\ dm$ **3p**

$12\sqrt{29} > 64\ dm \Leftrightarrow 3\sqrt{29} > 16 \Leftrightarrow 261 > 256\ (A)$..**3p**

b)Paralelipipedul poate fi descompus în $\frac{6\cdot 9\cdot 12}{3^3}$=24 cuburi cu muchia de 3dm..........................**5,5p**

Avem 25 de albine și 24 cuburi, conform principiului cutiei sunt cel puțin două albine în același cub..**4p**

Distanța maximă dintre cele două albine este diagonala cubului, adică $3\sqrt{3}\ dm$......................**4p**